

TD 14 : Limites, continuité

Limites

1 ★★ (Calcul de limites) Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^3 + x - 2)^2}{(x-1)^6}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(e^x)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$

2 ★★ Soit $f : x \mapsto \frac{\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor}{x}$.

- 1) Déterminer, si elles existent, les limites à gauche et à droite de f en 0. Est-ce que f admet une limite en 0 ?
- 2) Même question en $\frac{1}{2}$.

3 ★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^*$. En revenant à la définition de la limite, montrer que $\frac{1}{f} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{\ell}$.

4 ★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \lim_{x^-} f$ est croissante.

5 ★★★ Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite en la valeur indiquée :

- 1) $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ en $+\infty$.
- 2) $g : x \mapsto e^{\frac{1}{\sin x}}$ en 0.
- 3) $h : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor}$ en $+\infty$.

6 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique qui admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

7 ★★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y > 0 \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{x}{y}$$

8 ★★★★★ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ croissante positive. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Continuité

9 ★ Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? en 1 ?

10 ★★ On pose

$$g : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

Déterminer l'ensemble de définition de g . En quel(s) point(s) peut-on prolonger par continuité la fonction g ?

11 ★★ Soit $X \subset \mathbb{R}$. Rappeler la caractérisation de l'assertion " X est dense dans \mathbb{R} " avec des suites. En déduire que la fonction indicatrice sur \mathbb{Q} , notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout réel a .

12 ★★ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto \begin{cases} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \beta & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout $x > -1$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
- 2) Déterminer une CNS sur α et β pour que f admette un prolongement par continuité sur \mathbb{R} .

13 ★★★ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On procèdera par analyse-synthèse, en déterminant f sur \mathbb{N} , puis \mathbb{Z} , puis \mathbb{Q} , puis \mathbb{R} .

14 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

15 ★★★★★ Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. La fraction $\frac{p}{q}$ est dite irréductible à dénominateur positif (IDP) si p et q sont premiers entre eux et si q est positif. À toute fraction de \mathbb{Q} , il existe une unique fraction IDP qui lui est égale. Par exemple, la fraction $-\frac{30}{12}$ est égale à la fraction IDP $-\frac{5}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on note $d(x)$ le dénominateur de la fraction IDP qui est égale à x . Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{d(x)} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point de \mathbb{Q} et continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorèmes sur la continuité

16 ★★ (Un classique !) Soit P un polynôme réel de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

17 ★★ Vrai ou faux ? Justifier.

- 1) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.
- 2) Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.
- 3) Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
- 4) La fonction partie entière est continue sur $[0, 1[$.
- 5) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
- 6) S'il existe une suite (x_n) convergeant vers a telle que $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$, alors f est continue en a .

18 ★★ Montrer que l'équation

$$\sqrt{x^2 - \pi} \sin x + x^2 \cos x = -1$$

admet au moins une solution.

19 ★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat est-il vrai si f est croissante ?

20 ★★ Existe-t-il une application bijective et continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ? de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} ? de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} ?

21 ★★ Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f est bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

22 ★★★★★ Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

23 ★★★ On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que si f est coercive et continue, alors elle atteint son minimum, c'est-à-dire :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

24 ★★★★★ Un cycliste parcourt une distance de 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel ce cycliste aura parcouru exactement 10 km. (La demi-heure doit commencer après son départ et se terminer avant son arrivée).